Unidad TR.6: Leyes de Senos y Cosenos
Matemáticas
Ejemplo para plan de la lección – Desarrollo de la ley de cosenos

Desarrollo de la ley de cosenos

Primero, para repasar LAL y LLL, se les darán a los estudiantes varios datos sobre triángulos y se les pedirá que los tracen con regla y transportador. Compararán triángulos entre sí para ver con cuáles conjuntos de datos se obtiene un solo triángulo, así como para ver que con ciertos ejemplos de LLL no se obtiene triángulo. Los estudiantes desarrollarán la ley de cosenos como extensión lógica de la fórmula pitagórica y nuestra definición de razón de coseno. A continuación, explorarán los escenarios donde resulte útil, y verán qué sucede cuando intentan aplicarla a uno de los ejemplos de LLL imposibles de la actividad anterior.

1. Los estudiantes necesitarán reglas y transportador.
2. Dales los siguientes ejemplos y pídeles que intenten dibujar los triángulos:
   a. Un triángulo con lados de 5 cm, 8 cm y 10 cm.
   b. Un triángulo con lados de 4 cm, 5 cm y el ángulo incluido de 55 grados.
   c. Un triángulo con lados de 11 cm, 13 cm y 29 cm.
3. Dales tiempo para que trabajen con los triángulos. El ejemplo de LAL es bastante sencillo, pero LLL es más difícil. El ejemplo (a) es posible, pero requiere un poco de ensayo y error, pues aún no contamos con una técnica para hallar los ángulos que faltan. El ejemplo (c), por el contrario, no es posible.
4. Pídeles a los estudiantes que analicen los ejemplos en parejas y grupos pequeños. Date la vuelta por el salón para asegúrate de que estén llegando a las conclusiones correctas.
5. A continuación, pídeles que discutan las siguientes preguntas entre ellos:
   a. En general, ¿qué ilustra esto sobre la cantidad de información necesaria para determinar un triángulo? (Como hemos estudiado anteriormente, el LAL determina un triángulo único, independientemente de los números. Por otro lado, este no es el caso de LLL.)
   b. Si se proporcionan las longitudes de los lados, ¿cómo podemos comprobar si determinan un triángulo o no? (Verifica para asegurarte de que cada par de lados sume una longitud mayor que el tercer lado.)
   c. Aprendimos en geometría que LLL se prueba la congruencia; ¿cómo es posible que LLL no garantice un triángulo? (El postulado en geometría establecía que si dos triángulos compartían el mismo LLL, se supone que haya dos triángulos. No establece que cualquier combinación de tres longitudes de lado creará un triángulo.)
6. Presenta el tema de que si un triángulo está determinado por tres lados, debe haber alguna forma de usar los lados para hallar los ángulos.
7. Desarrolla la ley de cosenos con tu clase. Tómate el tiempo de facilitar el que descubran la fórmula en vez de presentarla antes de probarla o probarla muy rápidamente. Guía a los estudiantes por cada paso de la prueba con las siguientes instrucciones; es posible que no piensen en todos los pasos por su cuenta, pero podrán realizarlos con un poco de orientación.
   a. Comienza con el diagrama de triángulo estándar con los lados rotulados a, b y c y los ángulos rotulados A, B y C. Pon el ángulo A en la parte de arriba del diagrama y el lado a horizontal.
   b. Traza la altura que conecta el ángulo A con el lado a y rotúlalo h. Rotula con "x" la porción del lado a que está adyacente al lado b y la otra porción (a-x).

c. Deja que los estudiantes intenten la próxima parte por su cuenta; dependiendo del nivel que tengan puedes darles más o menos orientación. Pídeles que estipulen ecuaciones en base a lo que saben sobre los triángulos. Guíalos, de ser necesario, para que usen el teorema de Pitágoras con los dos triángulos que creaste.
d. Acepta sugerencias para los próximos pasos; al final, la forma de proceder es solucionar para *y* h^2 e igualar los resultados. A continuación, simplifica y usa trigonometría para reemplazar x por "b cos C".
e. Ahora ya tienen la ley de cosenos en la variación que más les recuerda la forma de rotular usada con la fórmula pitagórica: $c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab \cos C$. Han establecido una relación importante entre cuatro medidas del triángulo (como lo hicimos con la ley de senos), y si conocen tres de ellos (LAL o LLL) pueden resolver el cuarto.

8. Dales a los estudiantes la oportunidad de practicar usando estas fórmulas con ejercicios del libro. Asegúrate de incluir ejemplos en que:
   a. LAL esté dado y haya que hallar el tercer lado.
   b. El LLL de un triángulo esté dado y haya que hallar el ángulo que falta.
   c. Se dan tres longitudes que no formen un triángulo y haya que interpretar el resultado (con los cálculos se obtiene un valor imposible de coseno).
9. Discute con los estudiantes cómo el hecho de que LAL siempre determine un triángulo queda respaldado por la fórmula que acaban de derivar:
   a. Siempre y cuando el lado recto de la ecuación anterior sea positivo, obtendremos un valor para el tercer lado.
   b. Para ser negativo, demostrar que un tercer lado del triángulo es imposible, "2 ab cos C" tendría que ser mayor que "$a^2 + b^2$".
   c. Como cos C nunca es mayor que 1, podemos simplificar el enunciado anterior a: "2 ab" tendría que ser mayor que "$a^2 + b^2$".
   d. Pídeles a los estudiantes que exploren esta posibilidad. ¿Pueden encontrar dos números con los que sea el caso?
   e. Analízalo con álgebra; si estableces la desigualdad, se simplifica a $(a\text{-}b)^2$ es mayor que o igual a 0, lo cual es obviamente cierto para todos los valores reales de a y b.
   f. Finalmente, discute cómo resulta obvio a partir de un diagrama que LAL garantice un triángulo. Básicamente, LAL es un ángulo entre dos segmentos de línea: ¿cómo podría ser imposible conectar el final del segmento y crear un triángulo?
10. Los libros a menudo contienen una forma específica de la versión resuelta para coseno del ángulo en casos en que se da LLL. Discute esto con ellos; asegúrate de que lo vean como una variación de la ley de cosenos y no una fórmula más. Además, señálales que aunque sea conveniente, no es necesario. Por el contrario, podemos utilizar la versión de la ley de cosenos provista anteriormente, añadir los tres lados y resolver para el triángulo.